حمیدرضا امیری

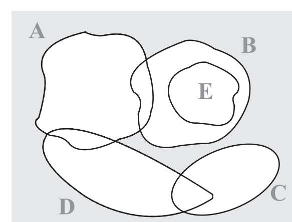
مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه

اشاره

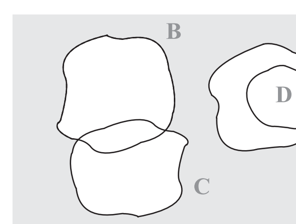
در کتاب ریاضی پایهٔ نهم با مفاهیمی چون مجموعه و زیرمجموعه آشنا می‌شوید و در کتاب ریاضی پایهٔ دهم و در ادامهٔ بحثِ مجموعه‌ها، مجموعهٔ مرجع، متمم یک مجموعه و مجموعه‌های متناهی و نامتناهی معرفی می‌شوند. برای درک بیشتر و عمیق‌تر این مفاهیم، مسائل و نکاتی را با هم بررسی می‌کنیم:

با توجه به معرفی و توضیحات کتاب درسی دربارهٔ مجموعهٔ مرجع و نمودارهای ون که در زیر رسم شده‌اند، مشخص کنید در کدام حالت مجموعهٔ U نمی‌تواند به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر گرفته شود؟

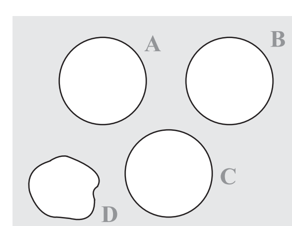
الف)



ب)



ج)



از آنجا که در نمودار (ب) بخشی از مجموعهٔ A در U قرار نگرفته است، و یا به عبارت دیگر، اعضایی در A وجود دارند که در U وجود ندارند، پس $A\not\subseteq U$. بنابراین U نمی‌تواند مجموعهٔ مرجع باشد. حال فرض کنیم:

$A=\{۱,۲\}$

$B=\{۲,۳,۴\}$

$C=\{۲,۳,۵,۷\}$

$D=\{۱,۲,۳,۵,۷,۴\}$

$E=\{۱۱,۱۲,۱۰\}$

در این صورت مجموعهٔ مرجع برای این پنج مجموعه، کدام مجموعه می‌تواند باشد؟

الف) $U_1=\{۱,۲,۳,...,۱۲\}$

ب) $U_2=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۱۰,۱۱,۱۲\}$

ج) $U_3=\{۰,۱,۲,...,۱۲\}$

د) $U_4=N$

هـ) $U_5=\{۱,۲,۳,...,۱۳\}$

و) $U_6=Z$

چون هر پنج مجموعهٔ داده شده، یعنی A، B، C، D و E در همهٔ حالت‌ها زیرمجموعهٔ U_6 و ... و U_3 و U_2 و U_1 هستند، لذا در تمام حالت‌ها مجموعه‌های معرفی شده می‌توانند برای این پنج مجموعه به‌عنوان مجموعهٔ مرجع معرفی شوند.

ولی به‌نظر می‌رسد در حالت (ب)، یعنی: $U_2=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۱۰,۱۱,۱۲\}$، با کمترین تعداد عضو نسبت به بقیهٔ حالت‌ها منظور ما برآورده می‌شود.

در واقع ما U_2 را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع برای مجموعه‌های A، B، C، D و E در نظر می‌گیریم. پس می‌توان گفت: بین همهٔ مجموعه‌هایی که شامل مجموعه‌هایی چون A_1، A_2، ... و A_n هستند، بهتر است مجموعه‌ای را به‌عنوانِ مجموعهٔ مرجع برای این A_1، A_2، ... و A_n در نظر بگیریم که دارای حداقلِ عضو باشد.

متمم یک مجموعه

اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد و مجموعهٔ U به‌عنوان مجموعهٔ مرجع برای A تعریف شده باشد، متمم مجموعهٔ A یعنی A' مجموعه‌ای است که دو ویژگی دارد: اول اینکه: $A\cap A'=\varnothing$ و دوم اینکه: $A\cup A'=U$.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر متممِ مجموعهٔ A را نسبت به مجموعهٔ مرجعِ معرفی شده به‌دست آورید:

الف) $\begin{cases} U=N \\ A=\{۲,۴,۶,...\} \\ A'=........... \end{cases}$

ب) $\begin{cases} U = Z \\ A = W = \{۰,۱,۲,...\} \\ A' = ... \end{cases}$

ج) $\begin{cases} U = \{۱,۲,۳,...,۱۰\} \\ A = \{۲,۳,۷,۹\} \\ A' = ... \end{cases}$

د) $\begin{cases} U = [-۴,۲۰] \\ A = (-۲,۲۰) \\ A' = ... \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} U = R \\ A = (-۱۰,\sqrt{۵۰}] \\ A' = ... \end{cases}$

حل: می‌دانیم همواره: $A'=U-A$. یعنی برای به‌دست آوردن مجموعهٔ A' کافی است اعضای A را از U حذف کنیم. آنچه باقی می‌ماند همان A' است. بنابراین داریم:

الف) $A'=U-A=N-\{۲,۴,۶,...\} \Rightarrow A'=\{۱,۳,۵,...\}$

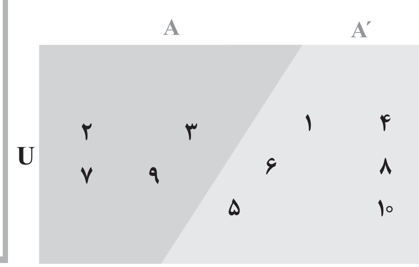
A مجموعهٔ اعداد طبیعی و زوج بوده و A' مجموعهٔ اعدادی طبیعیِ فرد به‌دست آمد؛ البته نسبت به مجموعهٔ مرجعِ $U=N$. اگر در همین قسمت الف مجموعهٔ U را به‌صورت $U=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ تعریف می‌کردیم، $A'=\{۰,۱,۳,۵,...\}$ به‌دست می‌آمد.

ب) $A'=U-A=Z-W \Rightarrow A'=\{...,-۳,-۲,-۱\}$

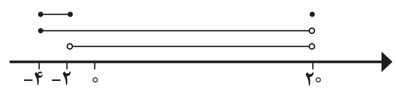
می‌توانیم A' را با استفاده از نمادهای ریاضی و به‌صورتِ $A'=\{-x|x\in N\}$ معرفی کنیم که همان قرینه‌های اعداد طبیعی هستند.

ج) $A'=U-A=\{۱,۲,...,۱۰\}-\{۲,۳,۷,۹\}$
$\Rightarrow A'=\{۱,۴,۵,۶,۸,۱۰\}$

در نمودار زیر مجموعه‌های U، A و A' را مشاهده می‌کنید.



د) $A'=U-A=[-۴,۲۰]-(-۲,۲۰) \Rightarrow$
$A'=[-۴,-۲]\cup\{۲۰\}$



توجه دارید که برای محاسبهٔ A' باید تمام اعداد حقیقی از ۲- تا ۲۰ را از U برداریم که البته خود ۲- و ۲۰ برداشته نمی‌شوند.

هـ) $A' = U - A = R - (-۱۰,\sqrt{۵۰}]$
$\Rightarrow A' = (-\infty,۱۰] \cup (\sqrt{۵۰},+\infty)$

در شکل زیر و روی محور اعداد حقیقی، قسمت‌های نقطه‌چین همان مجموعهٔ A هستند که از R حذف شده‌اند.

چند نکتهٔ مهم: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه نسبت به مجموعهٔ مرجعِ U، یعنی: $A'=\{x\in U|x\notin A\}$ یا: $A'=U-A$ داریم:

الف) $U'=U-U \Rightarrow U'=\varnothing$

ب) $\varnothing'=U-\varnothing \Rightarrow \varnothing'=U$

ج) $(A')'=U-A' \Rightarrow (A')'=A$

مسئلهٔ مهم: با توجه به تعریف عمل تفاضل بین دو مجموعه و تعریف متمم ثابت کنید:
$(A-B)=(A\cap B')$

و سپس نشان دهید:
$(A-B)=(B'-A')$

حل:

$A-B=\{x\in U|x\in A,x\notin B\}$
$=\{x\in U|x\in A,x\in B'\}$

$\xlongequal{\text{تعریف اشتراک}} (A\cap B') \Rightarrow A-B=A\cap B'$ ※

$A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A' \Rightarrow$
$(A-B)=(B'-A')$

در اثبات تساوی $A-B=B'-A'$، از خاصیت جابه‌جایی برای عمل اشتراک، یعنی: $A\cap B=B\cap A$ و از عکس رابطهٔ ※ استفاده شد.

تمرین: با توجه به رابطهٔ ※ طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید:

(مجموعهٔ مرجع را U در نظر بگیرید.)

الف) $A-A' = \cdots$

ب) $A-\varnothing = \cdots$

ج) $U-A' = \cdots$

د) $A-A = \cdots$

هـ) $A-U = \cdots$

و) $R-Q = \cdots$ (Q مجموعهٔ اعداد گویاست.)

ز) $W-W = \cdots$

ح) $R-\{۰\} = \cdots$

پرسش‌های بیکارجو! ؟ ۲

معادلهٔ $x^۳=[x]+۳$
چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) صفر

هـ) بی‌شمار